Naam:	Studentnummer: d99569	Bladnr.: 1
Adres: Trompstraat 22	Studierichting: WI	Tentamen: Distributieth.
Postcode en Woonplaats: 9711 EC Groningen	Jaar van eerste inschrijving: '95	Datum: 14-6-'99
		Naam docent: Thomas

6

1) d.w.z. bepaal de ~~oplossing~~ inverse van $\delta'' - 2\delta' + 1\delta$
dit kunnen we omschrijven m.b.v. "het bekende isomorfisme" tot het polynoom $s^2 - 2s + 1$, en bereken hier dan de inverse van.

$s^2 - 2s + 1 = (s-1)(s-1) = (s-1)^2$

de inverse hier van is: $(s-1)^{-2}$

dit kunnen we weer omschrijven m.b.v. "het bekende isomorfisme" tot:

$$Y(x) \times e^x$$ ✓

Voor het vervolg definieren we:

$$(D\delta)^{-1} := E := Y(x) \times e^x$$ ✓

2) $DT = Y \iff D(\delta * T) = Y \iff D\delta * T = Y$

$$\iff T = (D\delta)^{-1} * Y$$

Dus bereken: $\frac{1}{(s-1)^2} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s} - \frac{1}{(s-1)} + \frac{1}{(s-1)^2}$

Klad:

$$\frac{A}{s} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{(s-1)^2} = \frac{As - A + Bs}{s(s-1)} + \frac{C}{(s-1)^2}$$

$$= \frac{(As - A + Bs)(s-1)^{\cancel{2}} + Cs\cancel{(s-1)}}{s\cancel{(s-1)}(s-1)^2}$$

$$= \frac{As^2 - As + Bs^2 - As + A - Bs + Cs}{s(s-1)^2}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{cases} A=1 \\ -2A-B+C=0 \\ A+B=0 \end{cases} \quad \begin{cases} A=1 \\ B=-1 \\ -2+1+C=0 \end{cases} \quad \begin{cases} A=1 \\ B=-1 \\ C=1 \end{cases}$$

dus $\dfrac{1}{(s-1)^2} \cdot \dfrac{1}{s} = \dfrac{1}{s} - \dfrac{1}{s-1} + \dfrac{1}{(s-1)^2}$ ✓

Als we dit weer omschrijven vinden we :

$$T = Y(x) - Y(x)e^x + Y(x)xe^x$$ ✓

(3) $Df = g \quad , \quad f(0) = 0 = \alpha_0 \qquad f'(0) = 1 = \alpha_1$

$$(Yf)' = Yf' - 2\alpha_0 \delta$$
$$(Yf)'' = Yf'' + \alpha_0 \delta' + \alpha_1 \delta$$

$$\Rightarrow \begin{array}{rl} (Yf)' &= Yf' \\ (Yf)'' &= Yf'' + \delta \\ \hline DYf &= YDf + \delta \end{array}$$

$$\Rightarrow Yf = (D\delta)^{-1} * Yg + E$$

$$\Rightarrow f = \int_0^x g(x-y)\, y e^y \, dy + xe^x \cdot Y(x)$$ ✓

(4) $f = \int_0^x y e^y \, dy + xe^x$

$= e^y y \Big|_0^x - \int_0^x e^y \, dy + xe^x$

$= xe^x - e^y \Big|_0^x + xe^x$

$= xe^x - [e^x - 1] + xe^x$

$= 2xe^x - e^x + 1$ ✓

Naam [illegible]	Studentnummer: 0099569	Bladnr.: 2
Adres: Trompstraat 22	Studierichting: WI	Tentamen: Distributieth.
Postcode en Woonplaats: 9711 EC Groningen	Jaar van eerste inschrijving: '95	Datum: 14-6-'99
		Naam docent: Thomas

Dus $f(x) = 2xe^x - e^x + 1$

dan $f(0) = 0 - 1 + 1 = 0$

$f'(x) = 2xe^x + 2e^x - e^x$

$f'(0) = 0 + 2 - 1 = 1$

5) Voorwaarden die moeten gelden zijn:

*) $G \in C^2$

*) $G(0) = G'(0) = 0$

$\Rightarrow (YG)' = YG' - 2G(0)\delta$

$\underline{(YG)'' = YG'' + G(0)\delta' + G'(0)\delta}$

$DYG = YDG + \delta\left(G'(0) - 2G(0)\right) + G(0)\delta'$

maar $G(0) = G'(0) = 0$, dus ✓

$DYG = YDG$

Verder: $\int_0^x f(x-y)\, y e^y \, dy = G(x)$

dus $Yf * xe^x = YG$

$\Rightarrow Yf * (D\delta)^{-1} = YG$

$\Rightarrow Yf = D\delta * YG = D(\delta * YG) = DYG = YDG$

$\Rightarrow Yf = Y\left(G'' - 2G' + G\right)$

$\Rightarrow f = G'' - 2G' + G$ ✓

7) <u>definitie</u>

$$\langle \text{hw}\,\tfrac{1}{x}, \varphi\rangle = \text{hw} \int_{\mathbb{R}^m} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx$$

<u>Bewijs dat limiet bestaat</u> :

$$\varphi(x) = \varphi(0) + x \int_0^x (1-t)\,\varphi'(tx)\,dt$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left[\int_{a>|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(0)}{x}\,dx + \int_0^x (1-t)\,\varphi'(tx)\,dt \right]$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\varphi(0) \int_{a>|x|>\varepsilon} \frac{1}{x}\,dx + \int_0^x (1-t)\,\varphi'(tx)\,dt \right]$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\varphi(0) \int_{-a}^{-\varepsilon} \frac{1}{x}\,dx + \varphi(0) \int_{\varepsilon}^{a} \frac{1}{x}\,dx + \int_0^x (1-t)\,\varphi'(tx)\,dt \right]$$

$$= \left[\varphi(0) \cancel{\int_{-a}^{a} \frac{1}{x}\,dx} + \int_0^x (1-t)\,\varphi'(tx)\,dt \right]$$

$$= \varphi(0)\, \cancel{\tfrac{1}{2}x^2 \Big|_{-a}^{a}} + \int_0^x (1-t)\,\varphi'(tx)\,dt$$

$$= \varphi(0) \left[\cancel{\tfrac{1}{2}a^2 - \tfrac{1}{2}a^2} \right] + \int_0^x (1-t)\,\varphi'(tx)\,dt$$

$$= \int_0^x (1-t)\,\varphi'(tx)\,dt \quad \checkmark$$

$\int_{-a}^{a} \frac{dx}{x}$ bestaat niet maar bestaat en $\int_{\varepsilon<|x|\le a} \frac{dx}{x} = 0$ omdat $\frac{1}{x}$ oneven is. (of via expliciete berekening met de hoofdstelling)

$$\Rightarrow \left| \langle \text{hw}\,\tfrac{1}{x}, \varphi\rangle \right| \le \|\varphi'\|_\infty$$

en deze limiet bestaat en gaat naar nul als $\varphi_n \to 0$ als $\varphi \to 0$

$$T = \text{hw}\,\frac{1}{x} = \frac{1}{x} \text{ als } x \neq 0$$

$\rightarrow$ in E ~~kan~~ mag x niet nul zijn, dus daar geldt

[illegible]

Naar...	Studentnummer: 0899569	Bladnr.: 3
Adres: Trompstraat 22	Studierichting: WI	Tentamen: Distributieth.
Postcode en Woonplaats: 9711 EC Groningen	Jaar van eerste inschrijving: '95	Datum: 14-6-99
		Naam docent: Thomas

(3) (*)

wat is T_λ?

(*) Een distributie T_λ heet homogeen v/d graad α als $T_\lambda = \lambda^{\alpha} T$

$T|_{\mathbb{R}^*} = 1/x$

Deze integraal bestaat i.h.a. niet vandaar hw

$\langle T_\lambda , \varphi \rangle = \langle \frac{1}{\lambda x} , \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^m} \frac{1}{\lambda x} \cdot \varphi(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^m} \frac{\varphi(x)}{\lambda x}\, dx$

$= \frac{1}{\lambda} \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx = \lambda^{-1} \langle T, \varphi \rangle$

$\Rightarrow T_\lambda = \frac{1}{\lambda} T \Rightarrow \alpha = -1 \Rightarrow$ homogeen v/d graad.

(*) Stel $S \in E$ ook ~~van~~ homogeen v/d graad -1:

$\Rightarrow S_\lambda = \frac{1}{\lambda} S = 1/\lambda \cdot 1/x = \frac{1}{\lambda} \cdot T = T_\lambda$

$S \in E \Rightarrow S|_{\mathbb{R}^*} = \frac{1}{x}$ $\qquad \Rightarrow S_\lambda = T_\lambda$

$T \in E \Rightarrow T|_{\mathbb{R}^*} = 1/x$ $\qquad \Rightarrow \frac{1}{\lambda} S = \frac{1}{\lambda} T$

$\qquad \Rightarrow S = T$

Hoe? hw $1/x + c\delta$ homogeen v/d graad -1 etc.

$\Rightarrow$ er is maar precies 1 $T \in E$, die homo-

1) <u>definities</u> :

<u>getemperde distributie</u> : Een getemperde distributie op $\mathbb{R}^m$ is een lineaire afbeelding $T : S(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$ z.d.d. $\varphi_n \xrightarrow{S} \varphi \Rightarrow \langle T, \varphi_n \rangle \to \langle T, \varphi \rangle$.
d.w.z. T is een continue lineaire vorm op S

<u>fouriergetransformeerde v/e distributie</u> : de fouriergetransformeerde v/e distributie $T \in \cancel{\mathcal{D}}'(\mathbb{R}^n)$ zijn als volgt gedefinieerde getemperde distributies:

$$\langle \mathcal{F}T, \varphi \rangle = \langle T, \mathcal{F}\varphi \rangle$$

S

Toon aan $\mathcal{F}(T) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \mathcal{F}(T_\varepsilon)$ met

$T = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} T_\varepsilon$ als $\langle T, \varphi \rangle = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \langle T_\varepsilon, \varphi \rangle$

$$\langle \mathcal{F}T, \varphi \rangle = \langle T, \mathcal{F}\varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \langle T_\varepsilon, \mathcal{F}\varphi \rangle$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \langle \mathcal{F}T_\varepsilon, \varphi \rangle$$

$$\Rightarrow \mathcal{F}T = \lim_{\varepsilon \to 0} \mathcal{F}T_\varepsilon \qquad \checkmark$$

2) Zij f_ε een rij over $\mathbb{R}^m$ integreerbare functi
met $f_\varepsilon \geq 0$, $\int_{\mathbb{R}^m} f_\varepsilon(x)\, dx = 1/\varepsilon$,

$\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int_{|x|>r} f_\varepsilon(x)\, dx = 0$ met $r > 0$ $\Rightarrow \lim\limits_{\varepsilon \to 0} f_\varepsilon = Y$ X

We hebben nu $T_\varepsilon = Y(x)\, e^{-\varepsilon x}$

*) $\varepsilon > 0 \Rightarrow e^{-\varepsilon x} > 0$, $Y(x) = \begin{cases} 1 & \text{als } x \geq 0 \\ 0 & \text{als } x < 0 \end{cases}$

$\Rightarrow Y(x)\, e^{-\varepsilon x} \geq 0$

*) $\int_{-\infty}^{\infty} Y(x)\, e^{-\varepsilon x}\, dx = \int_0^{\infty} e^{-\varepsilon x}\, dx = -\frac{1}{\varepsilon} e^{-\varepsilon x} \Big|_0^{\infty} = 0 - -1/\varepsilon = $

*) $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int_{|x|>r} Y(x)\, e^{-\varepsilon x}\, dx = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int_{x>r} e^{-\varepsilon x}\, dx$

$= \lim\limits_{\varepsilon \to 0} -\frac{1}{\varepsilon} e^{-\varepsilon x} \Big|_x^{\infty} = 0 - \left(\lim\limits_{\varepsilon \to 0} -\frac{1}{\varepsilon} e^{-x\varepsilon} \right) = 0$

X Toon aan $\langle T_\varepsilon, \varphi \rangle \to \langle Y, \varphi$

$\Rightarrow \quad T = Y$

Naam:	Studentnummer: 899569	Bladnr.: 4
Adres: Trompstraat	Studierichting: WI	Tentamen: Distributieth.
Postcode en Woonplaats: 9711 EC Groningen	Jaar van eerste inschrijving: '95	Datum: 14-6-'99
		Naam docent: Thomas

3) Bepaal de fouriergetransformeerde van Y, met Y de heaviside functie

$\mathcal{F}(Y) = S$

we weten: $Y' = \delta$ $\quad \mathcal{F}(T') = 2\pi i x \, \mathcal{F}T$

$\Rightarrow \mathcal{F}(Y') = 2\pi i x \, \mathcal{F}(Y) = 2\pi i x \, S$

$\mathcal{F}(Y') = \mathcal{F}(\delta) = 1$

$\Rightarrow 2\pi i x \, S = 1$

$\Rightarrow \quad S = \mathcal{F}(Y) = \frac{1}{2\pi i} \, hw \frac{1}{x} + c\delta$

we weten $S + \check{S} = \mathcal{F}(1)$

$$S = \frac{1}{2\pi i} \, hw \frac{1}{x} + c\delta$$
$$S^{\vee} = \frac{-1}{2\pi i} \, hw \frac{1}{x} + c\delta$$
$$S + S^{\vee} = 2c\delta = \mathcal{F}(1) = \delta$$
$$\Rightarrow c = 1/2$$

$\Rightarrow \mathcal{F}(Y) = \frac{1}{2\pi i} \, hw \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\delta$

O.K. maar met de gevraagde methode